УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ЛЕНИНГРАДСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА имени А. А. ЖДАНОВА

№ 323

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Выпуск 37

ТРУДЫ
АСТРОНОМИЧЕСКОЙ
ОБСЕРВАТОРИИ

ТОМ XX

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1964

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ВЫП. 37

Астрофизика

К ЗАДАЧЕ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СРЕДЕ С ВНУТРЕННИМ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ[1]

В. А. Амбарцумян

При решении задачи о световом режиме в плоско-параллельной среде, состоящей из мутной жидкости, следует учитывать внутреннее отражение от граничной поверхности. При этом в настоящей статье мы ограничимся случаем, когда среда освещена падающим снаружи потоком параллельных лучей πS, который после преломления на поверхности и входа в среду образует угол θ_0 с внутренней нормалью.

Все величины, входящие в приведенные ниже уравнения, относятся к полю излучения внутри среды, в том числе и предельные значения рассматриваемых функций при оптической глубине $\tau=0$. Поскольку одним из главных результатов расчета должно быть значение интенсивности $I(\tau, \theta, \varphi)$ при $\tau=0$, то для получения значения этой интенсивности вне среды (т. е. для получения интенсивности диффузно-отраженного излучения вне среды) нужно будет ввести простые поправочные множители, учитывающие перераспределение по углам выходящего из среды излучения вследствие преломления, с одной стороны, и внутреннее отражение, которое ослабляет выходящее излучение, с другой стороны. Эти множители могут быть составлены элементарным путем. Поэтому поставим задачу: найти $I(0, \theta, \varphi)$ на внутренней стороне границы среды.

При наличии внутреннего отражения основное интегральное уравнение теории рассеяния света будет иметь вид, несколько отличный от обычного. Для вывода его напишем выражения интенсивности излучения.

Для лучей, идущих снизу вверх, на глубине τ будем иметь, как в обычном случае,

[1] Статья была написана в 1942 году, когда автор работал в ЛГУ.

$$I(\tau,\ \theta,\ \varphi)=\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{-(t-\tau)\sec\theta} B(t,\ \theta,\ \varphi)\sec\theta\, dt,\quad \left(\theta<\frac{\pi}{2}\right), \tag{1}$$

где $B(t,\ \theta,\ \varphi)$ есть функция источника, а θ — угол с внешней нормалью.

Для лучей, идущих сверху вниз,

$$I(\tau,\ \theta,\ \varphi)=-\int\limits_{0}^{\tau} e^{-(t-\tau)\sec\theta} B(t,\ \theta,\ \varphi)\sec\theta\, dt-$$

$$-\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(t+\tau)\sec(\pi-\theta)} p(\theta)\, B(t,\ \pi-\theta,\ \varphi)\sec\theta dt,\quad \left(\theta>\frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Т. е. интенсивность луча, идущего в некотором направлении вниз, на глубине складывается из того, что доходит из вышележащих слоев ($t<\tau$), и из того, что доходит от поверхности. Последнее представляет собою излучение, подвергшееся внутреннему отражению. Оно равно коэффициенту отражения $p(\theta)$, умноженному на интенсивность на границе луча, идущего наружу. Кроме того, учитывается то обстоятельство, что это отраженное излучение по пути ослабляется в $e^{-\tau\sec(\pi-\theta)}$ раз. Для $\theta>\bar{\theta}$, где $\bar{\theta}$ — угол полного внутреннего отражения, будем иметь $p(\theta)=1$. Функция источника $B(\tau,\ \theta,\ \varphi)$ выражается через интенсивность $I(\tau,\ \theta,\ \varphi)$ следующим образом:

$$B(\tau,\ \theta,\ \varphi)=\frac{\lambda S}{4}x(\cos\gamma_1)\, e^{-\tau\sec\theta_0}+\frac{\lambda}{4\pi}\int x(\cos\gamma)\, I(\tau,\ \theta',\ \varphi')\, d\omega', \tag{3}$$

где γ есть угол между направлениями θ, φ и θ', φ'; $d\omega'=\sin\theta' d\theta' d\varphi'$; γ_1 есть угол между направлением θ_0, φ_0 падающего извне параллельного пучка и направлением θ, φ. Функция $x(\cos\gamma)$ есть индикатриса рассеяния, а λ — альбедо при элементарном акте рассеяния.

Подставляя выражения (1) и (2) в уравнение (3), находим

$$B(\tau,\ \theta,\ \varphi)=\frac{\lambda S}{4}x(\cos\gamma_1)\, e^{-\tau\sec\theta_0}+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{\tau}^{\infty} dt\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\theta' d\theta' \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi' e^{-(t-\tau)\sec\theta'} x(\cos\gamma)\, B(t,\ \theta',\ \varphi')-$$

$$-\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{0}^{\tau} dt\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{tg}\theta' d\theta' \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi' e^{-(t-\tau)\sec\theta'} x(\cos\gamma)\, B(t,\ \theta',\ \varphi')+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} dt\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta' d\theta' \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi' e^{-(t+\tau)\sec(\pi-\theta')} p(\theta')\, x(\cos\gamma)\times$$

$$\times B(t,\ \pi-\theta',\ \varphi')\sec(\pi-\theta'). \tag{4}$$

Можно указать общий метод решения этого уравнения. Однако это связано с громоздкими формулами. Поэтому здесь остановимся лишь на методе решения для частного случая сферической индикатрисы, когда все формулы значительно упрощаются.

При сферической индикатрисе каждый элемент объема излучает одинаково во все стороны. Поэтому функция B не зависит от углов θ и φ. Принимая это во внимание, а также то, что $x(\cos\gamma)=1$, и интегрируя в правой части (4) по φ', получаем

$$B(\tau)=\frac{\lambda S}{4}e^{-\tau\sec\theta_0}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau}^{\infty}dt\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-(t-\tau)\sec\theta'}B(t)\operatorname{tg}\theta' d\theta' dt-$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\tau}dt\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-(t-\tau)\sec\theta'}B(t)\operatorname{tg}\theta' d\theta' dt+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\infty}dt\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-(t-\tau)\sec(\pi-\theta')}p(\theta')B(t)\operatorname{tg}(\pi-\theta')d\theta' dt. \qquad (5)$$

Обозначая в первом, втором и третьем интегралах $-\sec\theta'=z$, находим

$$B(\tau)=\frac{\lambda S}{4}e^{-\tau\sec\theta_0}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{\tau}^{\infty}B(t)\,dt\int\limits_{1}^{\infty}e^{-z(t-\tau)}\frac{dz}{z}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\tau}B(t)\,dt\int\limits_{1}^{\infty}e^{-z(\tau-t)}\frac{dz}{z}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\infty}B(t)\,dt\int\limits_{1}^{\infty}e^{-z(t+\tau)}p(z)\frac{dz}{z}.$$

Введя функцию

$$\int\limits_{1}^{\infty}e^{-zu}p(z)\frac{dz}{z}=H(u) \qquad (6)$$

и полагая $S=1$, мы придем окончательно к уравнению

$$B(\tau)=\frac{\lambda}{4}e^{-\tau\sec\theta_0}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\infty}Ei\,|\tau-t|\,B(t)\,dt+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\infty}H\,|\tau+t|\,B(t)\,dt. \qquad (7)$$

Заметим, что $p(z)$, как коэффициент внутреннего отражения, всегда меньше единицы или равен единице. Поэтому для функции $H(u)$ будем иметь

$$H(u)<Ei(u).$$

Кроме того, обе функции $Ei(u)$ и $H(u)$ монотонно убывают при возрастании аргумента.

Введем в (7) $\sec\theta_0 = \frac{1}{\eta_0}$. Кроме того, заметим, что $B(\tau)$ зависит от параметра η_0, входящего в свободный член уравнения (6), и явно отразим эту зависимость. Тогда (7) приводится к виду

$$B(\tau, \eta_0) = \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty (Ei|\tau - t| + H|\tau + t|)\, B(t, \eta_0)\, dt. \quad (8)$$

Наряду с этим уравнением далее придется иметь дело с решением уравнения с измененным ядром:

$$C(\tau, \eta_0) = \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty (Ei|\tau - t| - H|\tau + t|)\, C(t, \eta_0)\, dt. \quad (9)$$

Ядра уравнений (8) и (9) положительны.

Напишем уравнение (8) в виде

$$B(\tau, \eta_0) = \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\tau Ei(\tau - t)\, B(t, \eta_0)\, dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int\limits_\tau^\infty Ei(t - \tau)\, B(t, \eta_0)\, dt + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty H(\tau + t)\, B(t, \eta_0)\, dt.$$

Обозначим в первом интеграле правой части $\tau - t = u$, во втором $-t - \tau = u$, в третьем $-\tau + t = u$. Тогда

$$B(\tau, \eta_0) = \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\tau Ei(u)\, B(\tau - u, \eta_0)\, du +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty Ei(u)\, B(\tau + u, \eta_0)\, du + \frac{\lambda}{2}\int\limits_\tau^\infty H(u)\, B(u - \tau, \eta_0)\, du.$$

Продифференцируем обе части по τ и получим

$$B'(\tau, \eta_0) = \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\tau Ei(u)\, B'(\tau - u, \eta_0)\, du +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty Ei(u)\, B'(\tau + u, \eta_0)\, du - \frac{\lambda}{2}\int\limits_\tau^\infty H(u)\, B'(u - \tau, \eta_0)\, du +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} B(0, \eta_0)\, Ei(\tau) - \frac{\lambda}{2} B(0, \eta_0)\, H(\tau).$$

Переходя обратно от переменной u к t, соединяя получившиеся интегралы и пользуясь уравнением (6), имеем

$$B'(\tau, \eta_0) = -\frac{\lambda}{4\eta_0} e^{-\frac{\tau}{\eta_0}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty (Ei|\tau - t| - H|\tau + t|) B'(t, \eta_0)\, dt +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\xi}} [1 - p(\xi)] \frac{d\xi}{\xi} B(0, \eta_0). \qquad (10)$$

Получившееся уравнение (10) для функции $B'(t, \eta_0)$ имеет такое же ядро, как уравнение (9) для функции $C(t, \eta_0)$. Однако разница заключается в том, что свободный член уравнения (10) представляет собою суперпозицию членов типа $e^{-\frac{\tau}{\eta_0}}$. Поэтому и решения уравнения (10) можно представить как суперпозицию решений уравнения (9) при различных значениях параметра η_0. Именно

$$B'(\tau, \eta_0) = -\frac{1}{\eta_0} C(\tau, \eta_0) + 2B(0, \eta_0) \int_0^1 C(\tau, \xi) [1 - p(\xi)] \frac{d\xi}{\xi}. \quad (11)$$

Точно таким же образом продифференцировав уравнение (9), найдем

$$C'(\tau, \eta_0) = -\frac{1}{\eta_0} B(\tau, \eta_0) + 2C(0, \eta_0) \int_0^1 B(\tau, \xi) [1 + p(\xi)] \frac{d\xi}{\xi}. \quad (12)$$

Помножим обе части уравнений (11) и (12) на $\frac{1}{\eta} e^{-\frac{\tau}{\eta}}$ и проинтегрируем по τ от 0 до ∞. При этом обозначим

$$r(\eta, \eta_0) = \frac{1}{\eta} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\eta}} B(\tau, \eta_0)\, d\tau \qquad (*)$$

и

$$s(\eta, \eta_0) = \frac{1}{\eta} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\eta}} C(\tau, \eta_0)\, d\tau. \qquad (**)$$

Тогда

$$\frac{1}{\eta} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\eta}} B'(\tau, \eta)\, d\tau = -\frac{1}{\eta_0} s(\eta, \eta_0) +$$

$$+ 2B(0, \eta_0) \int_0^1 s(\eta, \xi) [1 - p(\xi)] \frac{d\xi}{\xi}; \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\eta}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\eta}} C'(\tau,\ \eta_0)\,d\tau = -\frac{1}{\eta_0} r(\eta,\ \eta_0) +$$

$$+ 2C(0,\ \eta_0)\int_0^1 r(\eta,\ \xi)\,[1+p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}. \qquad (14)$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\eta}\int_0^\infty B'(\tau,\ \eta_0)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}}\,dt = -\frac{1}{\eta} B(0,\ \eta_0) + \frac{1}{\eta^2}\int_0^\infty B(\tau,\ \eta_0)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\eta} B(0,\ \eta_0) + \frac{1}{\eta} r(\eta,\ \eta_0).$$

Подставляя его в уравнение (13), находим

$$\frac{1}{\eta} r(\eta,\ \eta_0) + \frac{1}{\eta_0} s(\eta,\ \eta_0) = B(0,\ \eta_0)\left\{\frac{1}{\eta} + 2\int_0^1 s(\eta,\ \xi)\,[1-p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\}.$$

Точно так же

$$\frac{1}{\eta} s(\eta,\eta_0) + \frac{1}{\eta_0} r(\eta,\ \eta_0) = C(0,\ \eta_0)\left\{\frac{1}{\eta} + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^1 r(\eta,\ \xi)\,[1+p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\}.$$

Положим

$$r(\eta,\ \eta_0) = \frac{\lambda}{4\eta} R(\eta,\ \eta_0);$$

$$s(\eta,\ \eta_0) = \frac{\lambda}{4\eta} S(\eta,\ \eta_0).$$

Тогда

$$\frac{1}{\eta} R(\eta,\ \eta_0) + \frac{1}{\eta_0} S(\eta,\ \eta_0) =$$

$$= \frac{4}{\lambda} B(0,\ \eta_0)\left\{1 + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 S(\eta,\ \xi)\,[1-p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\}, \qquad (15)$$

$$\frac{1}{\eta} S(\eta,\ \eta_0) + \frac{1}{\eta_0} R(\eta,\ \eta_0) =$$

$$= \frac{4}{\lambda} C(0,\ \eta_0)\left\{1 + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(\eta,\ \xi)\,[1+p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\}. \qquad (16)$$

Входящие в эти уравнения величины $B(0,\ \eta_0)$ и $C(0,\ \eta_0)$ находятся следующим образом: положим в уравнениях (8) и

(9) $\tau=0$. Тогда, принимая во внимание уравнение (6), а также (*) и (**), получим

$$B(0,\ \eta_0)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+2\eta_0\int_0^1 r(\eta_0,\ \xi)\,[1+p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\},$$

$$C(0,\ \eta_0)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+2\eta_0\int_0^1 s(\eta_0,\ \xi)\,[1-p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\}$$

или

$$B(0,\ \eta_0)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(\eta_0,\ \xi)\,[1+p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\},$$

$$C(0,\ \eta_0)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 S(\eta_0,\ \xi)\,[1-p(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}\right\}. \tag{17}$$

Вносся значения $B(0,\ \eta_0)$ и $C(0,\ \eta_0)$ в уравнения (15) и (16), получим

$$\frac{1}{\eta}R(\eta,\ \eta_0)+\frac{1}{\eta_0}R(\eta,\ \eta_0)=\frac{16}{\lambda^2}B(0,\ \eta_0)\cdot C(0,\ \eta),$$

$$\frac{1}{\eta}S(\eta,\ \eta_0)+\frac{1}{\eta_0}R(\eta,\ \eta_0)=\frac{16}{\lambda^2}C(0,\ \eta_0)\cdot B(0,\ \eta). \tag{18}$$

Для сокращения обозначим

$$\frac{4}{\lambda}B(0,\ \eta)=\varphi(\eta);\quad \frac{4}{\lambda}C(0,\ \eta)=\psi(\eta). \tag{19}$$

Тогда, складывая и вычитая уравнения (18), находим

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right)\{R(\eta,\ \eta_0)+S(\eta,\ \eta_0)\}=\varphi(\eta_0)\,\psi(\eta)+\varphi(\eta)\,\psi(\eta_0);$$

$$\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\eta_0}\right)\{R(\eta,\ \eta_0)-S(\eta,\ \eta_0)\}=\varphi(\eta_0)\,\psi(\eta)-\varphi(\eta)\,\psi(\eta_0). \tag{20}$$

Из (18) с учетом (19) получаем

$$2R(\eta,\ \eta_0)=\frac{\varphi(\eta_0)\,\psi(\eta)+\varphi(\eta)\,\psi(\eta_0)}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}}+\frac{\varphi(\eta_0)\,\psi(\eta)-\varphi(\eta)\,\psi(\eta_0)}{\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\eta_0}};$$

$$2S(\eta,\ \eta_0)=\frac{\varphi(\eta_0)\,\psi(\eta)+\varphi(\eta)\,\psi(\eta_0)}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}}-\frac{\varphi(\eta_0)\,\psi(\eta)-\varphi(\eta)\,\psi(\eta_0)}{\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\eta_0}}. \tag{21}$$

Подставляя значения (21) и (19) в выражение (17), получаем функциональные уравнения нашей задачи

$$\varphi(\eta)=1+\frac{\lambda}{4}\eta\int_0^1\left\{\frac{\varphi(\eta)\,\psi(\xi)+\varphi(\xi)\,\psi(\eta)}{\eta+\xi}+\frac{\varphi(\eta)\,\psi(\xi)-\varphi(\xi)\,\psi(\eta)}{\eta-\xi}\right\}\times$$

$$\times[1+p(\xi)]\,d\xi; \tag{22}$$

$$\psi(\eta)=1+\frac{\lambda}{4}\eta\int_0^1\left\{\frac{\varphi(\eta)\psi(\xi)+\varphi(\xi)\psi(\eta)}{\eta+\xi}-\frac{\varphi(\eta)\psi(\xi)-\varphi(\xi)\psi(\eta)}{\eta-\xi}\right\}\times$$
$$\times[1-p(\xi)]\,d\xi$$

или

$$\begin{aligned}\varphi(\eta)&=1+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\eta\varphi(\eta)\psi(\xi)-\xi\psi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta^2-\xi^2}[1+p(\xi)]\,d\xi,\\ \psi(\eta)&=1+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1\frac{\xi\varphi(\eta)\psi(\xi)-\eta\psi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta^2-\xi^2}[1-p(\xi)]\,d\xi.\end{aligned}\tag{23}$$

Эту систему двух функциональных уравнений удобно решать методом последовательных приближений. При вычислении удобно воспользоваться ими в форме

$$\begin{aligned}\varphi(\eta)&=1+\frac{\lambda}{2}\eta^2\varphi(\eta)\int_0^1\frac{\psi(\xi)-\psi(\eta)}{\eta^2-\xi^2}[1+p(\xi)]\,d\xi+\\ &+\frac{\lambda}{2}\eta\psi(\eta)\int_0^1\frac{\eta\varphi(\eta)-\xi\psi(\xi)}{\eta^2-\xi^2}[1+p(\xi)]\,d\xi,\\ \psi(\xi)&=1-\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1\frac{\xi\psi(\xi)-\eta\psi(\eta)}{\eta^2-\xi^2}[1-p(\xi)]\,d\xi-\\ &-\frac{\lambda}{2}\eta^2\psi(\eta)\int_0^1\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\xi)}{\eta^2-\xi^2}[1-p(\xi)]\,d\xi.\end{aligned}\tag{24}$$

В качестве примера мы разрешили эту систему уравнений для воды, приняв, что в видимых лучах показатель преломления равен 1,333. Этим определяется внутренняя отражательная способность поверхности $p(\theta)$ при различных углах.

Определив выражения для $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, мы нашли на основании уравнений (21) $R(\eta, \xi)$ и отсюда $r(\eta, \xi)$. В частности, были вычислены значения $r(\eta, \xi)$ при $\xi=1$ для различных η, т. е. при вертикальном падении лучей внешнего источника на водную поверхность. Однако полученная по указанным формулам функция $r(\eta, \xi)$ характеризует интенсивность диффузно-отраженного света непосредственно под поверхностью воды при $\tau=0$. При выходе лучей из воды вследствие их преломления происходит, как уже было указано, их перераспределение по направлению и внутреннее отражение. Поэтому меняется и интенсивность лучей. Это изменение учитывается путем введения добавочного множителя, учитывающего перераспределение и внутреннее отражение.

Как показывают результаты вычислений, влияние внутреннего отражения сказывается двояко: 1) происходит сильное общее уменьшение отраженного потока, т. е. уменьшение альбедо, и 2) лучи, диффузно-отраженные под углами к вертикали, близкими к $\frac{\pi}{2}$, ослабляются особенно сильно, и для $\theta=\frac{\pi}{2}$ интенсивность диффузно-отраженного света равна нулю. Это второе обстоятельство связано, главным образом, с перераспределением излучения в результате преломления при выходе излучения из воды.

* *
*

The problem of light scattering in semi-infinite medium with internal reflection from boundary surface is considered. The medium is supposed to be illuminated by parallel beam of radiation. The integral equation determining the source function is derived. In case of spherical phase function the emergent intensity is found.